

# **Оценка и хеджирование опционов при наличии трансакционных издержек: подход суперхеджирования**

Дубовик Андрей Андреевич \*

2004

Одним из известных подходов к оценке и хеджированию европейских опционов при наличии трансакционных издержек является подход так называемого суперхеджирования. В настоящей работе предложен новый алгоритм реализации этого подхода, допускающий обобщение на случай американских опционов. Данный алгоритм обладает рядом преимуществ по сравнению с известными и для случая европейских опционов. Приведены примеры использования данного алгоритма для построения интервала безарбитражных цен для европейских и американских опционов, а также приведены расчеты эффективности хеджирования европейских опционов при наличии трансакционных издержек.

## **Введение**

Блэк, Шоулз [3] и Мертон [8] в своих работах показали, что в условиях идеального рынка можно построить самофинансируемый портфель, стоимость которого будет в точности равна стоимости европейского опциона в момент его исполнения. Тогда стоимость опциона в начальный момент времени должна быть равна стоимости создания такого портфеля, поскольку обратное означало бы наличие арбитражных возможностей. Позднее Кокс, Росс и Рубинштейн [5] показали, что для оценки опционов правомерно использовать биномиальные деревья, поскольку при увеличении числа периодов, такая оценка сходится к оценке, полученной по формуле Блэка и Шоулза. Подход с использованием деревьев оказался удобным при расчетах и стал применяться и в более широкой области, например, для оценки американских опционов.

Одним из направлений финансовой математики является ослабление условий идеального рынка. Практическую ценность здесь представляет, в том числе, учет трансакционных издержек при совершении сделок. Когда каждая сделка сопровождается своими затратами, подход с использованием деревьев для оценки и хеджирования опционов также оказался удобным, поскольку при таком подходе количество пересмотров портфеля конечно. В частности, оценка опционов при наличии пропорциональных трансакционных издержек с использованием деревьев была рассмотрена в книге Мертона [9, Chapter 14, Section 14.2]. Позднее Бойл и Форст [4] расширили подход Мертона на многопериодную модель и рассмотрели стоимость как длинных, так и коротких позиций по опционам.

---

\* Автор признателен своему научному руководителю, Шведову А.С., за ряд ценных замечаний и дополнений.

Webpage: <http://www.yellowsite.ru>

При отсутствии транзакционных издержек безарбитражная цена опциона единственна. При наличии транзакционных издержек появляется интервал безарбитражных цен. То есть, если реальная стоимость опциона отклоняется от некоторой рассчитанной величины, но не слишком сильно, то арбитражных возможностей может и не быть, поскольку выигрыш может оказаться меньше сопутствующих хеджированию транзакционных издержек. Потому при наличии транзакционных издержек условие отсутствия арбитражных возможностей позволяет дать только интервальную оценку стоимости опциона. Тогда, при прочих равных, основной задачей становится сужение данного интервала. Подход суперхеджирования, рассмотренный в работах [2] и [6], дает более узкую интервальную оценку по сравнению с подходом Бойла и Форста [4]. В работе [2] рассматривается применение суперхеджирования для ряда частных случаев, в более поздней работе [6] Эдерисинджи, Нэйк и Уппал для случая европейских опционов при наличии пропорциональных транзакционных издержек рассматривают общий алгоритм реализации подхода суперхеджирования, основанный на поиске по сетке и на численном методе поиска корней уравнения.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм реализации подхода суперхеджирования. Предлагаемый алгоритм является более простым и наглядным, чем предложенный в работе [6]. Кроме того, он дает не приближенное решение задачи по определению параметров хеджирующего портфеля, зависящее от выбора размеров сетки, а точное решение. Предлагаемый алгоритм также может быть обобщен на случай американских опционов и на случай несимметричных пропорциональных транзакционных издержек (в работе [6] рассматриваются только европейские опционы и только симметричные пропорциональные транзакционные издержки). Эти обобщения представлены в настоящей работе. Для случая европейских опционов, американских опционов и для случая несимметричных издержек в работе приведены соответствующие примеры расчетов интервала безарбитражных цен с использованием предлагаемого алгоритма. Также исследуется эффективность хеджирования при использовании подхода суперхеджирования.

Структура работы следующая. Вначале дается формальная постановка задачи суперхеджирования как обобщение задачи совершенного хеджирования (раздел 1). Далее предлагается новый алгоритм ее решения, называемый геометрическим (раздел 2). На основе предлагаемого алгоритма даются примеры оценки европейского опциона в сравнении с результатами Бойла и Форста (раздел 3). В разделе 4 рассматривается случай несимметричных транзакционных издержек. В разделах с первого по четвертый рассматриваются только опционы европейского типа. Обобщение алгоритма на случай американских опционов и соответствующие примеры расчетов приведены в разделе 5. В заключительном разделе 6 приводятся расчеты эффективности хеджирования европейских опционов при наличии транзакционных издержек (сравнивается хеджирование по Блэку и Шоулзу, по Бойлу и Форсту и суперхеджирование).

## **1. Постановка задачи суперхеджирования**

Задачу суперхеджирования можно рассмотреть как обобщение задачи совершенного хеджирования для идеального рынка. Запишем последнюю в дискретном виде и при отсутствии транзакционных издержек (см., например, работу [5]).

Рассматривается биномиальное дерево со склеивающимися ветвями,  $t$  – момент времени,  $t$  изменяется дискретно и пробегает значения от 1 до  $T$ , то есть  $t \in \{1, \dots, T\}$ ,  $i$  – состояние экономики для заданного момента времени  $t$ . Так как рассматривается склеивающееся биномиальное дерево, то  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Обозначим через  $j(i)$  возможное состояние экономики в следующий момент времени, если в текущий момент времени экономика была в состоянии  $i$ . Вновь, поскольку рассматривается склеивающееся биномиальное дерево, то  $j(i)$  может принимать только два значения: либо  $i$ , либо  $i+1$ , то есть  $j(i) \in \{i, i+1\}$ . Обозначим через  $P(t, i)$  цену основного актива в момент времени  $t$  в состоянии  $i$ . Когда рассматриваются стратегии хеджирования, инвестор составляет портфель из основного актива и банковского вклада. Обозначим через  $a(t, i)$  количество основного актива в таком портфеле, а через  $b(t, i)$  – размер банковского вклада. Обозначим через  $r$  однопериодную (от  $t$  до  $t+1$ ) ставку процента (здесь и во всей работе рассматривается только постоянная ставка процента). Рассматривается европейский опцион, исполняемый в момент времени  $T$ , обозначим его стоимость в момент исполнения в состоянии  $i$  через  $C(T, i)$ .

Величины  $P(t, i)$  могут быть рассчитаны для каждого узла дерева исходя из уравнения динамики для цены основного актива и исходя из структуры дерева. Стоимость опциона в момент его исполнения, то есть  $C(T, i)$ , может быть непосредственно рассчитана для каждого состояния экономики  $i = \overline{1, T}$ . Величина  $r$  может быть рассчитана исходя из структуры дерева и исходя из значения годовой процентной ставки. Подробнее с этими расчетами можно ознакомиться, например, в обзоре [1].

Далее, составим портфель из основного актива и банковского вклада. Совершенное хеджирование, по определению, означает, что стоимость портфеля в момент времени  $T$  должна быть в точности равна стоимости опциона в этот момент времени в любом состоянии экономики:

$$(1) \quad P(t, i) \cdot a(t, i) + b(t, i) = C(T, i) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, T}.$$

Также запишем, что портфель является самофинансируемым:

$$(2) \quad P(t+1, j(i)) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) = P(t+1, j(i)) \cdot a(t+1, j(i)) + b(t+1, j(i)) \\ \text{при} \quad t = \overline{1, T-1}, \quad i = \overline{1, t} \quad \text{и} \quad j(i) \in \{i, i+1\}.$$

Уравнения (2) позволяют однозначно рассчитывать  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$  в момент времени  $t$  для всех  $i = \overline{1, t}$ , если заданы величины  $P(t+1, i) \cdot a(t+1, i) + b(t+1, i)$  для всех  $i = \overline{1, t+1}$ . Последовательно решая данные уравнения, однозначно находим величину  $P(1, 1) \cdot a(1, 1) + b(1, 1)$ . При отсутствии арбитражных возможностей стоимость опциона должна быть в точности равна этой величине. Действительно, стоимость опциона, например, не может быть выше. Положим

$$(3) \quad \bar{C} = P(1, 1) \cdot a(1, 1) + b(1, 1).$$

Предположим, что стоимость опциона при  $t=1$  выше, чем  $\bar{C}$ . Тогда можно занять короткую позицию по опциону, длинную позицию по портфелю и получить при этом прибыль. Поскольку  $a(1,1)$  и  $b(1,1)$  удовлетворяют уравнениям (1) и (2), то при любой динамике цены основного актива существует такая стратегия пересмотра портфеля, что в момент исполнения опциона стоимость портфеля будет в точности равна стоимости опциона. То есть короткая позиция по опциону и длинная позиция по портфелю взаимно закроются. А поскольку в начальный момент времени была получена прибыль, то это и означает наличие арбитража. То есть, в предположении об отсутствии арбитражных возможностей стоимость опциона в начальный момент времени не может быть выше, чем  $\bar{C}$ .

Рассмотрим теперь случай длинной позиции по опциону и короткой позиции по портфелю. Для этого уравнение (1) запишем иначе:

$$(4) \quad P(T, i) \cdot a(T, i) + b(T, i) = -C(T, i) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, T}.$$

Уравнение (2) оставим прежним. Также положим

$$(5) \quad \underline{C} = -(P(1,1) \cdot a(1,1) + b(1,1)).$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим, что стоимость опциона в начальный момент времени не может быть меньше, чем  $\underline{C}$ . При отсутствии транзакционных издержек, то есть когда условие самофинансируемости портфеля имеет вид (2), очевидно, имеем  $\underline{C} = \bar{C}$ . При этом, если цена опциона в начальный момент времени в точности равна этой величине, то арбитражных возможностей нет.

То есть, при отсутствии транзакционных издержек безарбитражная цена опциона единственна и определяется, например, формулами (1)-(3). В дальнейшем, когда будут учитываться транзакционные издержки,  $\underline{C}$  и  $\bar{C}$  будут различны, что будет означать наличие целого интервала безарбитражных цен. При этом в работе часто будет рассматриваться только задача для нахождения  $\bar{C}$ . Задача для нахождения  $\underline{C}$  рассматривается аналогично изложенному выше для случая, когда нет транзакционных издержек.

Уравнения (1)-(3) можно назвать задачей совершенного хеджирования. Расширим эту задачу на случай пропорциональных транзакционных издержек, связанных с продажей или покупкой основного актива, как это сделали Бойл и Форст [4]. Уравнения (1) и (3) останутся без изменений, а к уравнениям системы (2) добавится дополнительный член, отвечающий за пропорциональные транзакционные издержки:

$$(6) \quad P(t+1, j(i)) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) = \\ = P(t+1, j(i)) \cdot a(t+1, j(i)) + b(t+1, j(i)) + k \cdot P(t+1, j(i)) \cdot |a(t+1, j(i)) - a(t, i)| \\ \text{при} \quad t = \overline{1, T-1}, \quad i = \overline{1, t} \quad \text{и} \quad j(i) \in \{i, i+1\},$$

где  $k \geq 0$  – ставка комиссии. Комиссия начисляется на стоимость дополнительно купленного или дополнительно проданного основного актива. Система уравнений (1), (6), (3) позволяет оценить стоимость хеджирования короткой позиции по опциону при наличии

пропорциональных транзакционных издержек. Соответственно, система уравнений (4), (6), (5) позволяет оценить стоимость хеджирования длинной позиции. В работе Бойла и Форста рассматривается решение этих систем для европейского опциона колл. В более поздней работе Палмера [10] приводятся существенные дополнения к решению Бойла и Форста.

В этих работах показано, что при выполнении некоторых дополнительных условий, построенные уравнения будут однозначно разрешимы относительно  $\bar{C}$  и  $\underline{C}$ . Но здесь уже  $\underline{C}$  будет отлично от  $\bar{C}$ , точнее:  $\bar{C} \geq \underline{C}$ . Проводя рассуждения об арбитражных возможностях, легко показать, что при их отсутствии стоимость опциона должна лежать в интервале между  $\underline{C}$  и  $\bar{C}$ , то есть должна лежать в интервале между стоимостью хеджирования длинной и стоимостью хеджирования короткой позиций по опциону.

Дальнейшее расширение задачи может быть проведено в два шага. Во-первых, перейдем к рассмотрению дерева с несклеивающимися ветвями. Во-вторых, запишем задачу как экстремальную.

Для оценки европейских опционов можно строить биномиальное дерево, склеивающиеся относительно цен основного актива, то есть относительно  $P(t, i)$ . Но в общем случае стратегия хеджирования может зависеть не только от текущей цены основного актива, но и от цен основного актива в предыдущие моменты времени, то есть от предыстории. Это означает, что в общем случае дерево, будучи склеивающимся относительно  $P(t, i)$ , может быть не склеивающимся относительно  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$ .

В подходе совершенного хеджирования при рассмотрении европейских опционов, как при отсутствии транзакционных издержек, так и при их наличии, стратегия хеджирования не зависит от предыдущих цен основного актива, поэтому дерево является склеивающимся как относительно  $P(t, i)$ , так и относительно  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$ .

В подходе суперхеджирования оптимальная стратегия хеджирования зависит от предыстории (см., например, работу [6]), поэтому дерево является несклеивающимся относительно  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$ . Чтобы перейти к несклеивающемуся биномиальному дереву, положим  $i \in \{1, \dots, 2^{t-1}\}$  для заданного  $t$  и  $j(i) \in \{2i-1, 2i\}$  для заданного  $i$ . То есть, для заданного момента времени  $t$  экономика может быть в  $2^{t-1}$  различных состояниях, и, если в текущий момент времени экономика находится в состоянии  $i$ , то в следующий момент экономика может находиться либо в состоянии  $2i-1$ , либо в состоянии  $2i$ .

Рассмотрим короткую позицию по опциону. Подход совершенного хеджирования предполагает, что в момент исполнения опциона стоимость портфеля должна быть в точности равна стоимости опциона, то есть стоимость активов должна быть в точности равна стоимости обязательств:

$$(7) \quad P(T, i) \cdot a(T, i) + b(T, i) = C(T, i) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, 2^{T-1}}.$$

Можно, однако, рассмотреть более общую ситуацию, когда стоимость активов не меньше, чем стоимость обязательств. В случае короткой позиции по опциону это означает, что, стоимость портфеля должна быть не меньше, чем стоимость опциона в момент исполнения последнего:

$$(8) \quad P(T, i) \cdot a(T, i) + b(T, i) \geq C(T, i) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, 2^{T-1}}.$$

Ослабим также условие самофинансируемости портфеля:

$$(9) \quad P(t+1, j(i)) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) \geq \\ \geq P(t+1, j(i)) \cdot a(t+1, j(i)) + b(t+1, j(i)) + k \cdot P(t+1, j(i)) \cdot |a(t+1, j(i)) - a(t, i)| \\ \text{при } t = \overline{1, T-1}, \quad i = \overline{1, 2^{t-1}} \quad \text{и} \quad j(i) \in \{2i-1, 2i\}.$$

Условие (9) означает, что при пересмотре портфеля некоторая часть денег, вообще говоря, может быть израсходована сверх того, что расходуется на пропорциональные транзакционные издержки.

При этом в начальный момент времени ищется самый дешевый портфель, удовлетворяющий неравенству (8) и условию самофинансируемости (9):

$$(10) \quad \bar{C} = \min_{\{a,b\}} [P(1,1) \cdot a(1,1) + b(1,1)],$$

где  $\min_{\{a,b\}}$  означает минимум по всевозможным  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$  таким, что удовлетворены неравенства (8), (9).

Вновь, если рыночная стоимость опциона, обозначим ее  $C$ , удовлетворяет условию  $C > \bar{C}$ , то существует арбитражная возможность, заключающаяся в том, чтобы занять короткую позицию по опциону, длинную позицию по найденному портфелю, получив при этом  $C - \bar{C} > 0$  в качестве дохода, а затем пересматривать портфель так, чтобы в конечный момент времени стоимость портфеля была бы не меньше, чем предстоящая выплата по опциону. Последнее возможно, так как найденный портфель удовлетворяет уравнениям (8), (9).

При оптимальной стратегии хеджирования портфель в конечный момент времени может стоить строго больше, чем опцион (см. работы [2], [6]), поэтому такая задача носит название суперхеджирования.

Задача суперхеджирования является обобщением задачи, рассмотренной в работе Бойла и Форста, откуда следует, что интервальная оценка стоимости опциона, полученная из задачи суперхеджирования будет, по крайней мере, не шире той оценки, которую получили Бойл и Форст. Кроме того, в работах [2] и [6] приведены примеры, где подход суперхеджирования дает более хорошие результаты, то есть интервальная оценка безарбитражных цен опциона получается более узкой, чем при подходе совершенного хеджирования. В настоящей работе также будут приведены примеры таких расчетов (см. таблицу 1).

Задача суперхеджирования для нахождения верхней границы интервала безарбитражных цен опциона представлена уравнениями (8)-(10). Для нахождения нижней границы имеем:

$$(11) \quad P(T, i) \cdot a(T, i) + b(T, i) \geq -C(T, i) \quad \text{при } i = \overline{1, 2^{T-1}},$$

$$(12) \quad P(t+1, j(i)) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) \geq \\ \geq P(t+1, j(i)) \cdot a(t+1, j(i)) + b(t+1, j(i)) + k \cdot P(t+1, j(i)) \cdot |a(t+1, j(i)) - a(t, i)| \\ \text{при } t = \overline{1, T-1}, \quad i = \overline{1, 2^{t-1}} \quad \text{и} \quad j(i) \in \{2i-1, 2i\},$$

$$(13) \quad \underline{C} = -\min_{\{a,b\}} [P(1,1) \cdot a(1,1) + b(1,1)].$$

Если рыночная стоимость опциона  $C$  удовлетворяет условию  $C < \underline{C}$ , то существует арбитражная возможность, заключающаяся в том, чтобы занять длинную позицию по опциону, короткую позицию по найденному портфелю, получив при этом  $\underline{C} - C > 0$  в качестве дохода, а затем пересматривать портфель так, чтобы в конечный момент времени стоимость обязательств по портфелю была бы не больше, чем предстоящий доход по опциону. Последнее возможно, так как найденный портфель удовлетворяет уравнениям (11), (12).

## 2. Геометрический подход к решению задачи суперхеджирования

В настоящей работе предлагается новый алгоритм решения задачи суперхеджирования, то есть алгоритм решения задачи (8)-(10) и задачи (11)-(13). Перейдем к его изложению. Рассмотрим вначале детально задачу (8)-(10), а затем коснемся тех изменений, которые требуются для задачи (11)-(13).

Разобьем алгоритм на 4 этапа, причем 3 этап, который будет представлять наибольший интерес, разобьем дополнительно на несколько шагов.

### Этап 1. Построение биномиального дерева

Как и при совершенном хеджировании, построим биномиальное дерево со склеивающимися ветвями. Обозначения прежние:  $t$  – момент времени,  $t \in \{1, \dots, T\}$ , где  $T$  – момент исполнения опциона;  $i$  – состояние экономики для данного момента времени,  $i \in \{1, \dots, t\}$ ;  $j(i)$  – возможное будущее состояние экономики,  $j(i) \in \{i, i+1\}$ ;  $P(t, i)$  – цены основного актива в соответствующих узлах дерева. Отметим, что дерево является склеивающимся именно относительно цен основного актива, то есть относительно  $P(t, i)$ .

В предыдущем разделе говорилось о том, что если параметры портфеля  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$  (для всевозможных  $t$  и  $i$ ) доставляют решение задачи суперхеджирования, то дерево не может быть склеено относительно них. Но в предлагаемом алгоритме не требуется рассчитывать сами оптимальные значения  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$  в каждом узле дерева, вместо этого в каждом узле дерева рассчитываются множества величин  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$ , среди которых следует искать оптимальное решение. По ходу дальнейшего изложения алгоритма, данная идея, являющаяся центральной для настоящей работы, станет более ясной. Пока лишь отметим, что это позволяет рассматривать дерево со склеивающимися ветвями без уменьшения общности.

### Этап 2. Построение хеджирующих множеств в момент исполнения опциона

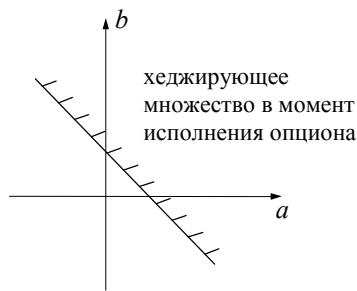
Введем понятие хеджирующего множества. Зафиксируем некоторый момент времени  $t$  и состояние экономики  $i$ .  $a(t, i)$  обозначает количество основного актива в портфеле при данных  $t$  и  $i$ ,  $b(t, i)$  – количество (размер) банковского вклада. Рассмотрим множество

$X(t, i)$  таких всевозможных портфелей  $(a(t, i), b(t, i))$ , что если в текущий момент времени  $t$  экономика находилась в состоянии  $i$ , то при любом развитии экономики в будущие моменты времени для любого такого портфеля найдется самофинансируемая стратегия его пересмотра такая, что в момент исполнения опциона стоимость рассматриваемых активов будет, по крайней мере, не меньше, чем стоимость рассматриваемых обязательств. Заданное таким образом множество  $X(t, i)$  назовем хеджирующим множеством. При фиксированных  $t$  и  $i$  множество  $X(t, i)$  – это некоторая часть плоскости, для которой первая координата ( $a$ ) соответствует количеству основного актива, а вторая координата ( $b$ ) – размеру банковского вклада.

Построим хеджирующие множества для всех состояний экономики в момент исполнения опциона, то есть в момент времени  $T$ . Поскольку рассматривается хеджирование короткой позиции по опциону (рассматривается задача (8)-(10)), то в момент исполнения опциона хеджирующее множество, по определению, состоит из всех таких портфелей, чья стоимость покрывает выплаты по этому опциону:

$$(14) \quad X(T, i) = \{(a, b) : P(T, i) \cdot a + b \geq C(T, i)\} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, T}.$$

На графике хеджирующие множества в конечный момент времени имеют вид полуплоскости:



**Рис. 1.** Хеджирующее множество в момент времени  $T$  (момент исполнения опциона) при состоянии экономики  $i$ . Границей хеджирующего множества является прямая  $b = C(T, i) - a \cdot P(T, i)$ .

### Этап 3. Построение хеджирующего множества в текущий момент времени по хеджирующим множествам следующего момента времени

В момент времени  $T$  любое хеджирующее множество является неограниченным выпуклым многоугольником с конечным числом вершин. Дальнейшие построения покажут, что это свойство хеджирующих множеств сохраняется и при их построении для более ранних моментов времени. Точнее про число вершин – в момент времени  $T$  оно равно 0, но при переходе к более ранним моментам времени число вершин может возрастать.

Рассмотрим произвольный фрагмент биномиального дерева (см. рисунок 2). Пусть в дереве определены хеджирующие множества  $A = X(t + 1, i + 1)$  и  $B = X(t + 1, i)$  в момент

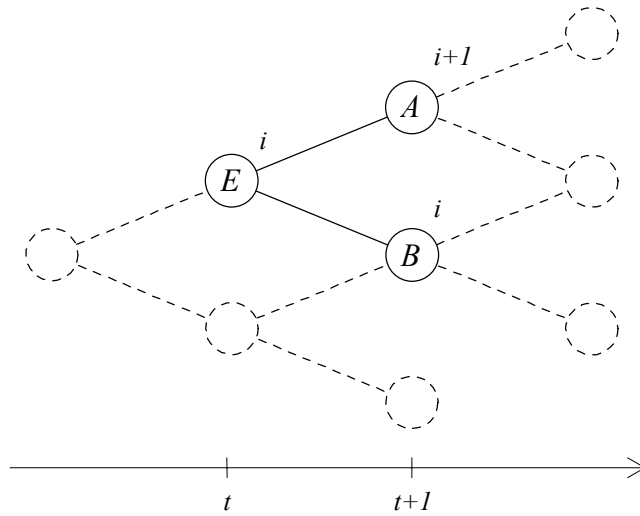


Рис. 2. Фрагмент биномиального дерева.

времени  $t+1$  для состояний  $i+1$  и  $i$ . Построим хеджирующее множество  $X(t, i) = E$  для момента времени  $t$  и состояния  $i$  (см. рисунки 2, 3).

**Шаг 1.** Положим  $C = A \cap B$ . Тогда, если в момент времени  $t+1$  портфель принадлежит множеству  $C$ , то в каком бы из состояний не находилась экономика, портфель будет принадлежать соответствующему хеджирующему множеству. Наоборот, если портфель не принадлежит множеству  $C$ , то найдется такое состояние экономики, при котором он не будет принадлежать соответствующему хеджирующему множеству.

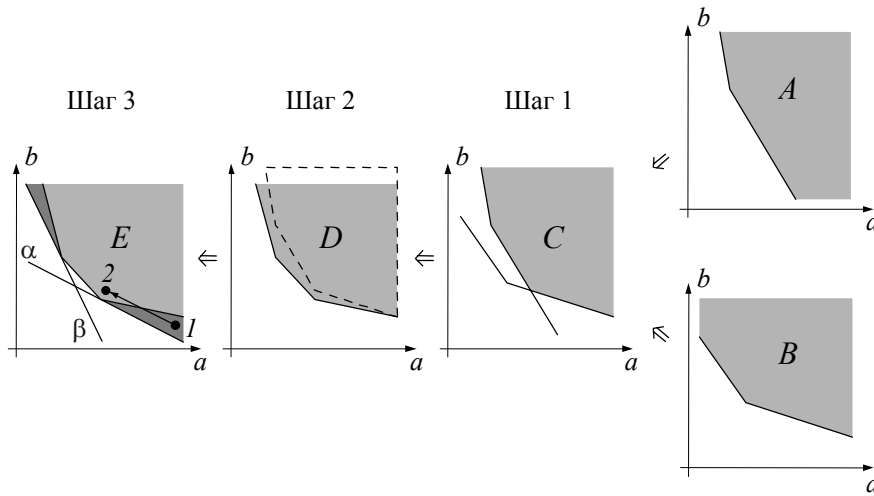
**Шаг 2.** В период от  $t$  до  $t+1$  на банковский вклад начисляются проценты по ставке  $r$ . Построим множество  $D$  такое, что если в момент времени  $t+1$  портфель принадлежит множеству  $C$ , то в момент времени  $t$  он принадлежит множеству  $D$ . И наоборот. Тогда для множества  $D$  имеем:

$$(15) \quad D = \{(a, b) : (a, (1+r)b) \in C\}.$$

**Шаг 3.** Учитывая возможность проведения торговых операций, расширим множество  $D$  до множества  $E$ . А именно, положим

$$(16) \quad E = \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) |u - a|, (a, b) \in D\}.$$

Тогда, если некоторый портфель  $(u, v)$  принадлежит множеству  $E$ , то его всегда можно будет пересмотреть так, чтобы получившийся портфель  $(a, b)$  принадлежал бы множеству  $D$ . При этом операция пересмотра является самофинансируемой и учитывает пропорциональные транзакционные издержки, определяемые ставкой комиссии  $k$ .



**Рис. 3.** Построение хеджирующего множества в текущий момент времени по хеджирующим множествам следующего момента времени.

Решение этой задачи имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим вначале случай продажи основного актива, то есть случай  $u \geq a$ . Пускай, для примера, портфель  $(u, v)$  находится в точке 1 (рис. 3, шаг 3). Тогда можно продать основной актив, получить за это деньги, уплатить комиссию и перейти в точку 2, соответствующую некоторому новому портфелю  $(a, b)$ . При этом должно быть верно, что

$$(17) \quad P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i)(u - a).$$

Или, иначе:

$$(18) \quad \frac{v - b}{u - a} \geq -(1 - k)P(t, i),$$

то есть угол наклона вектора 1.2 должен быть не круче, чем  $-(1 - k)P(t, i)$ . Тогда, если новый портфель  $(a, b)$  принадлежит множеству  $D$ , то портфель  $(u, v)$  будет принадлежать множеству  $E$  по определению последнего.

Поскольку величина  $-(1 - k)P(t, i)$  не зависит от координат точек 1 и 2 (то есть не зависит от  $(u, v)$  и  $(a, b)$ ), то для расширения множества  $D$  до множества  $E$ , в случае продажи основного актива, следует провести касательную к границе множества  $D$  с углом наклона равным  $-(1 - k)P(t, i)$  (линия  $\alpha$  на рисунке) и расширить множество  $D$  вплоть до этой касательной справа от точки касания.

В случае покупки основного актива, то есть при  $u \leq a$ , следует провести к границе множества  $D$  касательную с углом наклона равным  $-(1 + k)P(t, i)$  (этот угол наклона будет

более крутым — линия  $\beta$  на рисунке) и расширить множество  $D$  вплоть до этой касательной слева от точки касания.

Расширяя множество  $D$  одновременно и для случая продажи и для случая покупки основного актива, получим искомое множество  $E$ .

Построенное множество  $E$  является хеджирующим, поскольку, если портфель принадлежит этому множеству в момент времени  $t$  в состоянии экономики  $i$ , то в силу того, как было построено множество  $E$ , существует такая стратегия пересмотра портфеля, что при любом будущем состоянии экономики ( $i$  или  $i+1$ ) в момент времени  $t+1$  новый портфель будет принадлежать соответствующему хеджирующему множеству.

Если объединить шаги с первого по третий, то можно записать следующую формулу для  $X(t, i)$ :

$$(19) \quad X(t, i) = \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) |u - a|, \\ (a, (1+r)b) \in X(t+1, i) \cap X(t+1, i+1)\}.$$

#### Этап 4. Нахождение верхней границы интервала безарбитражных цен

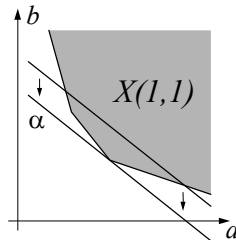
Поскольку можно построить хеджирующие множества для момента времени  $T$  (формула (14)), а также, поскольку из хеджирующих множеств момента времени  $t+1$  можно построить хеджирующие множества для момента времени  $t$  (формула (19)), то с помощью обратной индукции получаем хеджирующее множество для начального момента времени, то есть хеджирующее множество  $X(1, 1)$ .

Очевидно, что если наборы  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$  удовлетворяют задаче суперхеджирования, а именно, удовлетворяют уравнениям (8), (9), то  $(a(1, 1), b(1, 1)) \in X(1, 1)$ . И обратно, если некоторый портфель  $(a, b) \in X(1, 1)$ , то существуют наборы  $a(t, i)$  и  $b(t, i)$ , удовлетворяющие уравнениям (8), (9), такие, что  $(a(1, 1), b(1, 1)) = (a, b)$ .

Тогда нахождение верхней границы интервала безарбитражных цен, то есть нахождение  $\bar{C}$ , определяемого уравнением (10), сводится к минимизации  $P(1, 1) \cdot a + b$  по множеству  $X(1, 1)$ :

$$(20) \quad \bar{C} = \min_{(a, b) \in X(1, 1)} (P(1, 1) \cdot a + b).$$

Геометрически это представимо как нахождение касательной с углом наклона равным  $-P(1, 1)$  к границе множества  $X(1, 1)$  (см. рисунок 4).



**Рис. 4.** Поиск самого дешевого портфеля в хеджирующем множестве  $X(1,1)$ . Касательная  $\alpha$  представлена уравнением  $b = \bar{C} - P(1,1) \cdot a$ .

Можно сделать следующие замечания относительно сложности предлагаемого алгоритма. Если рассматривать класс операций над множествами (объединение, пересечение, расширение, в предложенном смысле, различных множеств), то в этом классе алгоритм обладает квадратичной сложностью. То есть количество операций из этого класса, требуемых для оценки опциона, квадратично зависит от числа шагов в дереве (количество требуемых операций представимо в виде  $c_1 + c_2 T + c_3 T^2$ , где  $c_i$  не зависят от  $T$ ). Кроме того, большинство операций из этого класса — скажем, объединение, пересечение множеств, нахождение касательных — может быть реализовано с помощью линейных алгоритмов, то есть количество арифметических действий, требуемых для выполнения этих операций, линейно зависит от числа вершин у соответствующих множеств (напомним, что все хеджирующие множества имеют вид многоугольников, это так, поскольку рассматриваются пропорциональные транзакционные издержки). Поскольку хеджирующие множества могут становиться более комплексными (число вершин может увеличиваться), то в целом сложность всего алгоритма будет больше квадратичной.

Повторим формальную запись предлагаемого алгоритма для нахождения верхней и нижней границ интервала безарбитражных цен опциона. Для верхней границы имеем:

$$(21) \quad X(T, i) = \{(a, b) : P(T, i) \cdot a + b \geq C(T, i)\} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, T},$$

$$(22) \quad X(t, i) = \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) | u - a |, \\ (a, (1+r)b) \in X(t+1, i) \cap X(t+1, i+1)\} \quad \text{при} \quad t = \overline{1, T-1} \quad \text{и} \quad i = \overline{1, t},$$

$$(23) \quad \bar{C} = \min_{(a,b) \in X(1,1)} (P(1,1) \cdot a + b).$$

Для нижней границы имеем:

$$(24) \quad X(T, i) = \{(a, b) : P(T, i) \cdot a + b \geq -C(T, i)\} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, T},$$

$$(25) \quad X(t, i) = \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) | u - a |, \\ (a, (1+r)b) \in X(t+1, i) \cap X(t+1, i+1)\} \quad \text{при} \quad t = \overline{1, T-1} \quad \text{и} \quad i = \overline{1, t},$$

$$(26) \quad \underline{C} = - \min_{(a,b) \in X(1,1)} (P(1,1) \cdot a + b).$$

Положим

$$(27) \quad \alpha(t, i) = \frac{(1+r)P(t, i) - P(t+1, i)}{P(t+1, i+1) - P(t+1, i)}.$$

Тогда, если  $0 \leq \alpha(t, i) \leq 1$  для всех  $t = \overline{1, T-1}$  и для всех  $i = \overline{1, t}$ , то  $\bar{C} \geq \underline{C}$  (см. приложение 1, лемму 2).

### 3. Пример оценки европейских опционов

Приведем примеры расчетов для европейского опциона колл. В качестве модели для динамики цены основного актива рассматривается модель геометрического броуновского движения. При этом цены основного актива в узлах дерева определяются следующим образом (в соответствии с подходом Кокса-Росса-Рубинштейна [5]):

$$(28) \quad P(t, i) = P(1, 1) \cdot \exp\left(\sigma \sqrt{\frac{\mathbf{T}}{T}}(2i - t - 1)\right) \quad \text{при} \quad t = \overline{2, T} \quad \text{и} \quad i = \overline{1, t},$$

где  $\mathbf{T}$  – время до исполнения опциона, измеряемое в годах, и  $\sigma$  – волатильность цен основного актива. Однопериодная процентная ставка  $r$  задается уравнением

$$(29) \quad r = \exp(R \cdot \mathbf{T} / T),$$

где  $R$  – годовая процентная ставка с непрерывным начислением.

Цена опциона колл в конечный момент времени определяется по формуле

$$(30) \quad C(T, i) = \max(P(T, i) - K, 0),$$

где  $K$  – цена исполнения опциона.

Подставляя формулы (28)-(30) в уравнения (21)-(23), получим оценку верхней границы интервала безарбитражных цен опциона. Подставляя (28)-(30) в уравнения (24)-(26), получим оценку нижней границы.

В работах [4] и [10] приведены примеры оценки опционов на основе подхода Бойла и Форста, в работе [6] приведены примеры оценки опционов на основе подхода суперхеджирования для  $T \leq 19$ . Правильность работы алгоритмов, использованных в настоящей работе для расчетов, а именно: алгоритма, реализующего подход Бойла и Форста, и алгоритма, реализующего подход суперхеджирования, была проверена посредством сравнения результатов их работы с вышеуказанными примерами. Здесь и на протяжении всей работы в качестве алгоритма для реализации подхода суперхеджирования использовался алгоритм, предложенный в разделе 2.

В таблице 1 приведен пример по расчету интервалов безарбитражных цен для европейских опционов колл на основе подхода Бойла и Форста в сравнении с расчетами на основе подхода суперхеджирования.

**Таблица 1. Оценка европейских опционов.**

Рассматривается опцион колл; 1-й интервал – интервал  $(\underline{C}, \overline{C})$ , полученный на основе подхода Бойла и Форста; 2-й интервал – интервал  $(\underline{C}, \overline{C})$ , полученный на основе подхода суперхеджирования; процентный показатель – отношение длин интервалов;  $T$  – число периодов; начальная цена основного актива  $P(1, 1) = 100$ ; цена исполнения опциона  $K = 110$ ; годовая процентная ставка  $R = 0.1$ ;  $\sigma$  – волатильность цен основного актива;  $k$  – ставка комиссии за совершение сделок по основному активу; время до исполнения опциона  $\mathbf{T} = 1$  (1 год).

Таблица 1. Оценка европейских опционов.

$\sigma = 0.2$

$T$	$k = 0.00$	$k = 0.01$	$k = 0.02$	$k = 0.03$
16	8.042 - 8.042	6.147 - 9.552	3.212 - 10.861	n.a. - 12.035
	8.042 - 8.042	6.322 - 9.460	3.907 - 10.700	2.334 - 11.820
	n.a	92.18%	88.81%	n.a
32	8.204 - 8.204	5.500 - 10.208	n.a. - 11.880	n.a. - 13.347
	8.204 - 8.204	5.605 - 10.153	2.593 - 11.786	1.917 - 13.223
	n.a	96.62%	n.a	n.a
64	8.158 - 8.158	3.661 - 10.883	n.a. - 13.043	n.a. - 14.889
	8.158 - 8.158	3.844 - 10.845	1.085 - 12.980	0.468 - 14.793
	n.a	96.93%	n.a	n.a
128	8.186 - 8.186	n.a. - 11.831	n.a. - 14.570	n.a. - 16.858
	8.186 - 8.186	1.795 - 11.807	0.889 - 14.527	0.889 - 16.787
	n.a	n.a	n.a	n.a

$\sigma = 0.3$

$T$	$k = 0.00$	$k = 0.01$	$k = 0.02$	$k = 0.03$
16	12.248 - 12.248	10.529 - 13.755	8.468 - 15.116	5.696 - 16.367
	12.248 - 12.248	10.649 - 13.665	8.768 - 14.952	6.370 - 16.142
	n.a	93.49%	93.03%	91.58%
32	12.085 - 12.085	9.549 - 14.167	5.868 - 15.976	n.a. - 17.597
	12.085 - 12.085	9.641 - 14.106	6.281 - 15.868	3.010 - 17.452
	n.a	96.66%	94.85%	n.a
64	12.148 - 12.148	8.385 - 14.969	n.a. - 17.323	n.a. - 19.382
	12.148 - 12.148	8.457 - 14.930	2.875 - 17.256	1.969 - 19.293
	n.a	98.33%	n.a	n.a
128	12.133 - 12.133	6.138 - 15.963	n.a. - 19.004	n.a. - 21.597
	12.133 - 12.133	6.210 - 15.936	1.510 - 18.961	0.950 - 21.534
	n.a	99.00%	n.a	n.a

$\sigma = 0.4$

$T$	$k = 0.00$	$k = 0.01$	$k = 0.02$	$k = 0.03$
16	16.262 - 16.262	14.595 - 17.771	12.709 - 19.162	10.483 - 20.458
	16.262 - 16.262	14.706 - 17.681	12.966 - 18.996	10.954 - 20.227
	n.a	93.68%	93.46%	92.96%
32	16.126 - 16.126	13.712 - 18.211	10.747 - 20.073	6.491 - 21.769
	16.126 - 16.126	13.796 - 18.150	10.964 - 19.962	7.037 - 21.617
	n.a	96.77%	96.49%	95.44%
64	16.003 - 16.003	12.412 - 18.880	6.986 - 21.352	n.a. - 23.547
	16.003 - 16.003	12.499 - 18.839	7.406 - 21.279	2.675 - 23.450
	n.a	98.02%	96.57%	n.a
128	16.071 - 16.071	10.714 - 19.981	n.a. - 23.198	n.a. - 25.982
	16.071 - 16.071	10.766 - 19.954	2.746 - 23.152	1.949 - 25.922
	n.a	99.14%	n.a	n.a

Из таблицы видно, что интервалы безарбитражных цен опционов, рассчитанные на основе подходов Бойла и Форста и суперхеджирования, существенно расширяются с ростом числа шагов в дереве (с ростом  $T$ ). Причины этого ясны: поскольку в качестве модели для движения цены основного актива было использовано геометрическое броуновское движение, то при  $T \rightarrow \infty$  цена основного актива в конечный момент времени может быть сколь угодно большой (или сколь угодно малой), пускай и с очень маленькой вероятностью. При этом стратегия хеджирования должна охватывать все такие маловероятные случаи. При отсутствии транзакционных издержек это возможно за счет все более частого пересмотра портфеля (с ростом  $T$ ). Но при наличии транзакционных издержек каждый такой пересмотр сопряжен с потерями, что приводит к постепенному расширению интервальной оценки, получаемой из условия отсутствия арбитражных возможностей.

Из таблицы также видно, что у подхода суперхеджирования всегда есть выигрыш (отношение длин интервалов) в сравнении с подходом Бойла и Форста в среднем в размере порядка 5%. С одной стороны, этот выигрыш уменьшается с ростом  $T$ , и алгоритм Бойла и Форста является более простым с вычислительной точки зрения. С другой стороны, алгоритм Бойла и Форста дает решение не во всех случаях, и он применим только к биномиальным деревьям, где нет пропущенных узлов. В таблице 1 обозначения п.а. как раз и соответствуют тем случаям, когда алгоритм Бойла и Форста не дает решения (это случаи, когда уравнения системы (6) однозначно не разрешимы). В свою очередь, алгоритм суперхеджирования дает решение во всех случаях, и, кроме того, он применим к деревьям любого вида.

#### **4. Случай несимметричных издержек**

В разделе 2 был описан геометрический подход к решению задачи суперхеджирования для случая пропорциональных транзакционных издержек. Данный подход также допускает обобщения для издержек более общего вида, скажем для фиксированных издержек или для пропорциональных издержек с прогрессивной шкалой комиссионной ставки (речь идет об обобщениях, которые практически несложно реализовать — в теории подход допускает обобщения на любой вид транзакционных издержек, но при этом его практическая реализация может быть связана со значительными трудностями).

В качестве примера обобщения предложенного подхода рассмотрим случай несимметричных пропорциональных транзакционных издержек. Обобщение подхода на этот случай, с одной стороны, представляется непосредственным, а с другой стороны, представляет интерес, например, для моделирования разницы цен спроса и предложения основного актива.

В случае несимметричных пропорциональных транзакционных издержек системы уравнений (9) и (12) из задачи суперхеджирования примут следующий вид:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+k_l) \cdot P(t+1, j(i)) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) \geq \\ \geq (1+k_l) \cdot P(t+1, j(i)) \cdot a(t+1, j(i)) + b(t+1, j(i)) \\ \text{в случае } a(t+1, j(i)) \geq a(t, i) \\ \\ (1-k_s) \cdot P(t+1, j(i)) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) \geq \\ \geq (1-k_s) \cdot P(t+1, j(i)) \cdot a(t+1, j(i)) + b(t+1, j(i)) \\ \text{в случае } a(t+1, j(i)) < a(t, i) \end{array} \right.$$

при  $t = \overline{1, T-1}$ ,  $i = \overline{1, 2^{t-1}}$  и  $j(i) \in \{2i-1, 2i\}$ ,

где  $k_l$  – ставка комиссии при покупке основного актива,  $k_s$  – ставка комиссии при продаже основного актива.

Легко заметить, что при расширении хеджирующих множеств за счет возможности торгов (рис. 3, шаг 3) задание различных пропорциональных издержек для случаев покупки и продажи основного актива не повлечет за собой практически никаких изменений алгоритма, поэтому сразу перейдем к примеру расчетов. Для примера возьмем случай, когда  $k_l = k_s = k$ , в сравнение со случаями, когда  $k_l = k$ ,  $k_s = 0$  и  $k_l = 0$ ,  $k_s = k$ .

**Таблица 2. Случай несимметричных издержек.**

Рассматривается опцион колл; годовая процентная ставка  $R = 0.1$ ; первоначальная цена основного актива  $P(1,1) = 100$ ; цена исполнения опциона  $K = 110$ ; время до исполнения  $T = 1$ ; годовая волатильность цен основного актива  $\sigma = 0.2$ ; число периодов  $T = 16$ .

$k$	$k_l = k_s = k$	$k_l = k, k_s = 0$	Отношение длин интервалов
0.00	8.042 - 8.042	8.042 - 8.042	п.а.
0.01	6.322 - 9.460	7.231 - 8.770	0.490
0.02	3.907 - 10.700	6.315 - 9.430	0.459
0.03	2.334 - 11.820	5.237 - 10.035	0.506
0.04	1.119 - 12.852	3.861 - 10.594	0.574
0.05	0.468 - 13.799	2.774 - 11.103	0.625

$k$	$k_l = k_s = k$	$k_l = 0, k_s = k$	Отношение длин интервалов
0.00	8.042 - 8.042	8.042 - 8.042	п.а.
0.01	6.322 - 9.460	7.222 - 8.777	0.495
0.02	3.907 - 10.700	6.275 - 9.456	0.468
0.03	2.334 - 11.820	5.125 - 10.088	0.523
0.04	1.119 - 12.852	3.582 - 10.684	0.605
0.05	0.468 - 13.799	2.644 - 11.248	0.645

Из таблицы видно, что при отсутствии комиссии на продажу или на покупку основного актива в сравнении со случаем, когда аналогичная комиссия есть как на покупку, так и на продажу, интервал безарбитражных цен уменьшается примерно в два раза, что и можно было ожидать. Схожие результаты также получаются для не рассматриваемого здесь случая, когда  $K = 90$ , то есть когда интервалы рассчитываются для опциона вне денег.

## 5. Оценка американских опционов

Обобщим рассматриваемый подход к решению задачи суперхеджирования на случай оценки американских опционов.

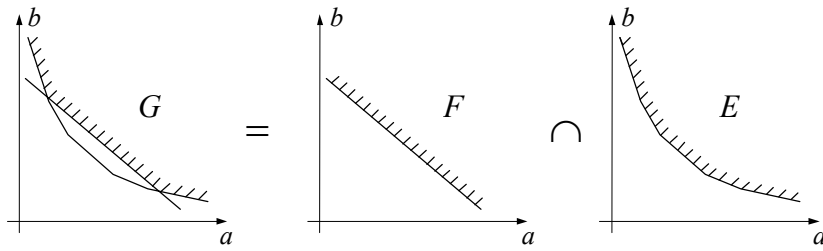
Вспомним вначале, что для нахождения верхней границы интервала безарбитражных цен европейского опциона рассматривалось хеджирование короткой позиции по этому опциону. Американский опцион отличается от европейского тем, что он может быть исполнен в любой момент времени. Тогда, если занять короткую позицию по американскому опциону, то при поиске стратегии, которая обеспечивала бы покрытие обязательств по этому опциону, необходимо учитывать, что контрагент может этот опцион исполнить в любой момент времени. Вернемся к рисункам 2 и 3. Если даны хеджирующие множества  $A$  и  $B$  в момент времени  $t+1$  для состояний  $i+1$  и  $i$ , то можно построить множество  $E$  для момента времени  $t$  и состояния  $i$ . При этом, если портфель принадлежит множеству  $E$ , то при любом дальнейшем движении цены основного актива существует такая стратегия пересмотра портфеля, что он окажется в одном из хеджирующих множеств. Перейдем теперь к рисунку 5.

Если контрагент исполняет американский опцион в момент времени  $t$  в состоянии  $i$ , обозначим соответствующие обязательства по опциону через  $C(t, i)$ , то портфель, чтобы его стоимости было достаточно для покрытия выплат по этому опциону, должен принадлежать множеству  $F$ , определяемому как

$$(32) \quad F = \{(a, b) : P(t, i) \cdot a + b \geq C(t, i)\}.$$

Также портфель должен принадлежать множеству  $E$ . Получаем, что для построения хеджирующего множества  $G$  в момент времени  $t$  в состоянии  $i$  требуется взять пересечение множеств  $E$  и  $F$ . Остальная часть алгоритма остается прежней. Вновь, строим хеджирующие множества для последнего момента времени, затем для предпоследнего и так далее, вплоть до первого момента времени. В хеджирующем множестве первого момента времени находим самый дешевый портфель и его стоимость принимаем за оценку верхней границы интервала безарбитражных цен американского опциона.

Для нахождения нижней границы интервала безарбитражных цен европейского опциона рассматривалось хеджирование длинной позиции по этому опциону. При оценке нижней границы интервала безарбитражных цен американского опциона поступаем аналогично. Но опять же, опцион может быть исполнен в любой момент времени. Только теперь право исполнения опциона принадлежит тому агенту, который его хеджирует. Тогда, если рассматривать множества аналогичные  $E$ ,  $F$  и  $G$ , но только для хеджирования длинной позиции по опциону, то, очевидно, что для построения множества  $G$  требуется брать не пересечение множеств  $E$  и  $F$ , а их объединение.



**Рис. 5.** Построение хеджирующего множества, учитывающего возможность раннего исполнения опциона.

В случае объединения множеств  $E$  и  $F$  получившееся множество  $G$  может быть не выпуклым, то есть в случае хеджирования длинной позиции по американскому опциону может не выполняться свойство выпуклости хеджирующих множеств. При этом алгоритм, представленный в разделе 2 остается прежним за исключением того, что реализация шага 3 этапа 3 будет немногим более сложной, чем для выпуклых множеств.

Запишем формально задачу суперхеджирования для американских опционов. Для оценки верхней границы имеем:

$$(33) \quad P(T, i) \cdot a(T, i) + b(T, i) \geq C(T, i) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, 2^{T-1}}.$$

$$(34) \quad \begin{cases} P(t+1, j(i)) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) \geq \\ \geq P(t+1, j(i)) \cdot a(t+1, j(i)) + b(t+1, j(i)) + \\ + k \cdot P(t+1, j(i)) \cdot |a(t+1, j(i)) - a(t, i)| \\ P(t, i) \cdot a(t, i) + b(t, i) \geq C(t, i) \end{cases}$$

при  $t = \overline{1, T-1}, \quad i = \overline{1, 2^{t-1}} \quad \text{и} \quad j(i) \in \{2i-1, 2i\},$

$$(35) \quad \bar{C} = \min_{\{a, b\}} [P(1, 1) \cdot a(1, 1) + b(1, 1)],$$

где  $\bar{C}$  – оценка верхней границы интервала безарбитражных цен американского опциона в начальный момент времени.

Для оценки нижней границы имеем:

$$(36) \quad P(T, i) \cdot a(T, i) + b(T, i) \geq -C(T, i) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, 2^{T-1}}.$$

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(t+1, 2i-1) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) \geq \\ \geq P(t+1, 2i-1) \cdot a(t+1, 2i-1) + b(t+1, 2i-1) + \\ + k \cdot P(t+1, 2i-1) \cdot |a(t+1, 2i-1) - a(t, i)| \\ P(t+1, 2i) \cdot a(t, i) + (1+r) \cdot b(t, i) \geq \\ \geq P(t+1, 2i) \cdot a(t+1, 2i) + b(t+1, 2i) + \\ + k \cdot P(t+1, 2i) \cdot |a(t+1, 2i) - a(t, i)| \\ P(t, i) \cdot a(t, i) + b(t, i) \geq -C(t, i) \end{array} \right.$$

при  $t = \overline{1, T-1}, \quad i = \overline{1, 2^{t-1}},$

$$(38) \quad \underline{C} = -\min_{\{a, b\}} [P(1, 1) \cdot a(1, 1) + b(1, 1)],$$

где  $\underline{C}$  – оценка нижней границы интервала безарбитражных цен американского опциона в начальный момент времени.

Аналогично, уравнения (21)-(23) для верхней границы примут вид:

$$(39) \quad X(T, i) = \{(a, b) : P(T, i) \cdot a + b \geq C(T, i)\} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, T},$$

$$(40) \quad X(t, i) = \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) |u - a|, \\ (a, (1+r)b) \in X(t+1, i) \cap X(t+1, i+1)\} \cap \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq C(t, i)\} \\ \text{при} \quad t = \overline{1, T-1} \quad \text{и} \quad i = \overline{1, t},$$

$$(41) \quad \overline{C} = \min_{(a, b) \in X(1, 1)} (P(1, 1) \cdot a + b).$$

Уравнения (24)-(26) для нижней границы примут вид:

$$(42) \quad X(T, i) = \{(a, b) : P(T, i) \cdot a + b \geq -C(T, i)\} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, T},$$

$$(43) \quad X(t, i) = \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) |u - a|, \\ (a, (1+r)b) \in X(t+1, i) \cap X(t+1, i+1)\} \cup \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq -C(t, i)\} \\ \text{при} \quad t = \overline{1, T-1} \quad \text{и} \quad i = \overline{1, t},$$

$$(44) \quad \underline{C} = -\min_{(a, b) \in X(1, 1)} (P(1, 1) \cdot a + b).$$

Напомним, что

$$(45) \quad \alpha(t, i) = \frac{(1+r)P(t, i) - P(t+1, i)}{P(t+1, i+1) - P(t+1, i)}.$$

Тогда, как и при оценке европейских опционов, если  $0 \leq \alpha(t, i) \leq 1$  для всех  $t = \overline{1, T-1}$  и для всех  $i = \overline{1, t}$ , то  $\bar{C} \geq \underline{C}$  (см. приложение 1, лемму 3).

Приведем далее пример по расчету интервалов безарбитражных цен для американских опционов.

### Таблица 3. Оценка американских опционов.

1-й интервал – интервал безарбитражных цен для опциона американского типа; 2-й интервал – интервал безарбитражных цен для опциона европейского типа;  $T$  – число периодов;  $k$  – ставка комиссии за совершение сделок по основному активу. Начальная цена основного актива  $P(1,1) = 100$ ; цена исполнения опциона  $K = 110$ ; годовая волатильность цен основного актива  $\sigma = 0.3$ ; годовая процентная ставка  $R = 0.1$ ; время до исполнения опциона  $T = 1$ .

#### Опционы колл

$T$	$k = 0.00$	$k = 0.01$	$k = 0.02$	$k = 0.03$
16	12.248 - 12.248	10.681 - 13.665	8.829 - 14.952	6.484 - 16.142
	12.248 - 12.248	10.649 - 13.665	8.768 - 14.952	6.370 - 16.142
32	12.085 - 12.085	9.658 - 14.106	6.459 - 15.868	3.527 - 17.452
	12.085 - 12.085	9.641 - 14.106	6.281 - 15.868	3.010 - 17.452
64	12.148 - 12.148	8.495 - 14.930	3.009 - 17.256	2.138 - 19.293
	12.148 - 12.148	8.457 - 14.930	2.875 - 17.256	1.969 - 19.293
128	12.133 - 12.133	6.235 - 15.936	1.734 - 18.961	1.389 - 21.534
	12.133 - 12.133	6.210 - 15.936	1.510 - 18.961	0.950 - 21.534

#### Опционы пут

$T$	$k = 0.00$	$k = 0.01$	$k = 0.02$	$k = 0.03$
16	13.901 - 13.901	12.553 - 15.188	11.376 - 16.411	10.294 - 17.524
	11.780 - 11.780	10.181 - 13.197	8.300 - 14.485	5.902 - 15.674
32	13.838 - 13.838	11.877 - 15.684	10.257 - 17.347	9.729 - 18.865
	11.617 - 11.617	9.173 - 13.638	5.813 - 15.400	2.543 - 16.984
64	13.869 - 13.869	10.956 - 16.442	9.828 - 18.667	9.828 - 20.647
	11.680 - 11.680	7.989 - 14.462	2.407 - 16.788	1.501 - 18.826
128	13.859 - 13.859	10.063 - 17.397	9.914 - 20.320	9.914 - 22.848
	11.665 - 11.665	5.742 - 15.469	1.042 - 18.493	0.482 - 21.066

Можно подметить, что в расчетах встречаются следующие ситуации:

Опционы колл		Опционы пут	
E	A	A	A
       	     	E     	E     

**Рис. 6.** Схематичное изображение интервалов безарбитражных цен для европейских и американских опционов.

Известно, что при отсутствии транзакционных издержек цены на американские и европейские опционы колл совпадают. Расчеты из таблицы 3 показывают, что при наличии транзакционных издержек для американских и европейских опционов колл совпадают только оценки верхней границы интервала безарбитражных цен. В свою очередь, для опционов пут расчеты показывают, что верхняя и нижняя границы для американских опционов отличны от верхней и нижней границ для соответствующих европейских опционов. При этом сопутствующие интервалы могут как пересекаться, так и не пересекаться. В целом, границы интервалов безарбитражных цен американских опционов колл и пут всегда не ниже соответствующих границ для европейских опционов. Так и должно быть, поскольку американский опцион предоставляет, по крайней мере, не меньше возможностей своему держателю, чем европейский.

Ранее было сказано о том, что для опционов европейского типа интервал безарбитражных цен расширяется с ростом  $T$ . Как показывает таблица 3, это наблюдение также остается верным и для опционов американского типа.

## 6. Эффективность хеджирования

Оценить практическую значимость того или иного подхода к оценке опционов можно, рассмотрев эффективность хеджирования с помощью данного подхода. Поэтому, чтобы оценить практическую значимость подходов Бойла и Форста и суперхеджирования, далее для этих подходов приведены расчеты эффективности хеджирования короткой позиции по европейскому опциону колл при наличии транзакционных издержек. Для сравнения, также приведены расчеты эффективности хеджирования при использовании подхода Блэка и Шоулза.

Эффективность хеджирования рассчитывалась следующим образом (более подробное описание оценки эффективности хеджирования изложено в книге Халла [7, Chapter 14, Sections 14.3 - 14.4]):

**Шаг 1.** Рассчитывалось  $M$  случайных траекторий движения цены основного актива с числом шагов  $N$  каждая:

$$(46) \quad P_1^k = P \quad \text{при} \quad k = \overline{1, M},$$

$$(47) \quad P_{t+1}^k = P_t^k \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_t^k\right) \quad \text{при } t = \overline{1, N-1} \quad \text{и } k = \overline{1, M},$$

где  $P_t^k$  – цена основного актива на шаге  $t$  на  $k$ -ой траектории,  $P$  – начальная цена основного актива,  $\mu$  и  $\sigma$  – темп роста и волатильность цен основного актива соответственно,  $\Delta t = T/N$ , и где  $\varepsilon_t^k$  – независимые стандартные нормальные случайные величины.

**Шаг 2.** Так как рассматривалось хеджирование короткой позиции по опциону, то в начальный момент времени в качестве рыночной цены рассматриваемого опциона, обозначим ее  $C$ , бралась верхняя граница интервала его безарбитражных цен, то есть  $\overline{C}$ . Величина  $C = \overline{C}$  была рассчитана по формулам (21)-(23) при  $P(1,1) = P$  и  $T = N$  (количество шагов в дереве, используемом для расчета  $\overline{C}$ , полагалось равным количеству шагов в траекториях). Величина  $C$  была одной и той же для всех тестируемых алгоритмов. После этого из короткой позиции по опциону колл, длинной позиции по основному активу ( $\Delta_1^k$ ) и из банковского вклада ( $b_1^k$ ) составлялся первоначальный портфель. Дельта рассчитывалась в соответствии с выбранным алгоритмом (для алгоритмов Бойла и Форста и суперхеджирования при расчете дельта в начальный момент времени и в последующие моменты времени использовалось дерево с количеством шагов  $T = n$ , см. таблицу 4), размер банковского вклада определялся так, чтобы стоимость первоначального портфеля была нулевой:

$$(48) \quad b_1^k = C - P_1^k \Delta_1^k \quad \text{для всех } k = \overline{1, M}.$$

Далее, для каждого последующего момента времени  $t$  и для каждой траектории  $k$  в соответствии с выбранным алгоритмом рассчитывалась новая дельта ( $\Delta_t^k$ ), при этом в алгоритме корректировалась начальная цена основного актива ( $P(1,1) = P_t^k$ ) и время, оставшееся до исполнения опциона. Затем происходил пересмотр портфеля: количество основного актива изменялось до уровня новой дельты, банковский вклад изменялся так, чтобы портфель оставался самофинансируемым:

$$(49) \quad b_t^k = (1+r)b_{t-1}^k - P_t^k (\Delta_t^k - \Delta_{t-1}^k) - k \cdot P_t^k |\Delta_t^k - \Delta_{t-1}^k| \quad \text{при } t = \overline{2, N-1} \quad \text{и } k = \overline{1, M}.$$

В последний момент времени происходило закрытие позиции по основному активу и исполнение обязательств по опциону:

$$(50) \quad b_N^k = (1+r)b_{N-1}^k + P_N^k \Delta_{N-1}^k - \max(P_N^k - K, 0) \quad \text{при } k = \overline{1, M}.$$

Полученные величины  $b_N^k$  – результаты хеджирования на соответствующих траекториях. При отсутствии транзакционных издержек, если взять  $C$  равным цене по Блэку и Шоулзу, то при  $N \rightarrow \infty$  величины  $b_N^k \rightarrow 0$  для любого  $k$  (при хеджировании по

Блэку и Шоулзу, это также верно при суперхеджировании и хеджировании по Бойлу и Форсту при  $n \rightarrow \infty$ ). Отметим, что в формулах (48), (50), то есть в начальный и конечный моменты времени, как и в используемых алгоритмах, не учитываются транзакционные издержки.

**Шаг 3.** Для величин  $b_N^k$  рассчитывались их среднее и стандартное отклонение:

$$(51) \quad \bar{b} = \frac{\sum_{k=1}^M b_N^k}{M}, \quad \sigma(b) = \frac{\sum_{k=1}^M (b_N^k - \bar{b})^2}{M}.$$

Среднее  $\bar{b}$  и стандартное отклонение  $\sigma(b)$  были приняты за показатели эффективности хеджирования: при прочих равных, чем выше среднее для данного алгоритма, тем меньше издержки хеджирования, и, чем меньше стандартное отклонение, тем более надежен данный алгоритм хеджирования.

В таблице 4 приведены расчеты эффективности хеджирования короткой позиции по европейскому опциону колл при хеджировании по Блэку и Шоулзу, по Бойлу и Форсту и при суперхеджировании. Для возможности сравнения, величины  $\bar{b}$  и  $\sigma(b)$  дополнительно поделены на цену, по которой первоначально был продан опцион (поделены на  $C$ ), и, кроме того, при расчете показателей эффективности хеджирования были использованы одни и те же наборы случайных траекторий.

**Таблица 4. Эффективность хеджирования европейских опционов.**

Рассматривается хеджирование короткой позиции по опциону колл; 1-я пара чисел – это  $\bar{b}/C$  и  $\sigma(b)/C$  для хеджирования по Блэку и Шоулзу, 2-я – для хеджирования по Бойлу и Форсту, 3-я – для суперхеджирования. Параметры экономики следующие: годовая процентная ставка  $R = 0.1$ ; первоначальная цена основного актива  $P = 100$ ; цена исполнения опциона  $K = 105$ ; время до исполнения  $T = 1$ ; число шагов в траектории  $N = 100$ ; число траекторий  $M = 100$ ; количество шагов в дереве, используемом для расчета дельты по алгоритмам Бойла и Форста и суперхеджирования, равно 16 ( $n = 16$ ). За  $k$  обозначена ставка комиссии, за  $\mu$  и  $\sigma$  – темп роста и волатильность цен основного актива соответственно.

$$\mu = 0.15$$

$\sigma$	$k = 0.00$		$k = 0.03$		$k = 0.06$		$k = 0.09$	
	$\bar{b}/C$	$\sigma(b)/C$	$\bar{b}/C$	$\sigma(b)/C$	$\bar{b}/C$	$\sigma(b)/C$	$\bar{b}/C$	$\sigma(b)/C$
0.2	0.020	0.061	-0.018	0.204	-0.166	0.322	-0.315	0.415
	0.018	0.061	0.059	0.074	0.052	0.094	0.044	0.118
	0.018	0.061	0.055	0.071	0.038	0.081	0.019	0.088
0.3	0.019	0.069	0.007	0.154	-0.103	0.245	-0.221	0.317
	0.018	0.069	0.057	0.078	0.050	0.092	0.040	0.109
	0.018	0.069	0.055	0.077	0.044	0.086	0.030	0.094
0.4	0.020	0.078	0.021	0.130	-0.063	0.206	-0.160	0.269
	0.019	0.078	0.055	0.083	0.051	0.091	0.043	0.101
	0.019	0.078	0.053	0.082	0.046	0.089	0.035	0.096

$$\sigma = 0.3$$

$\mu$	$k = 0.00$		$k = 0.03$		$k = 0.06$		$k = 0.09$	
	$\bar{b}/C$	$\sigma(b)/C$	$\bar{b}/C$	$\sigma(b)/C$	$\bar{b}/C$	$\sigma(b)/C$	$\bar{b}/C$	$\sigma(b)/C$
0.1	0.017	0.075	0.002	0.152	-0.110	0.240	-0.231	0.311
	0.017	0.074	0.057	0.081	0.053	0.092	0.046	0.106
	0.017	0.074	0.054	0.081	0.045	0.089	0.033	0.097
0.3	0.019	0.077	0.037	0.165	-0.055	0.261	-0.159	0.338
	0.016	0.078	0.062	0.079	0.055	0.088	0.045	0.099
	0.016	0.078	0.060	0.077	0.048	0.084	0.030	0.091
0.5	0.011	0.059	0.097	0.157	0.045	0.250	-0.028	0.323
	0.007	0.060	0.059	0.062	0.047	0.071	0.031	0.084
	0.007	0.060	0.060	0.062	0.044	0.069	0.024	0.074

Из таблицы видно, что подходы Бойла и Форста и суперхеджирования обеспечивают хорошие результаты хеджирования при наличии транзакционных издержек. Эти результаты сравнимы с теми, что дает хеджирование по Блэку и Шоулзу в случае отсутствия транзакционных издержек. При этом  $\sigma(b)/C$ , рассчитанное на основе подхода суперхеджирования, во всех случаях оказывалось несколько меньшим, чем  $\sigma(b)/C$ , рассчитанное на основе подхода Бойла и Форста.

Из таблицы также видно, что при наличии транзакционных издержек использование традиционного подхода Блэка и Шоулза дает  $\sigma(b)/C$  существенно большее по сравнению с подходом суперхеджирования и по сравнению с подходом Бойла и Форста.

## Заключение

Одним из подходов к оценке производных финансовых инструментов при наличии транзакционных издержек является подход суперхеджирования. В работе был представлен новый алгоритм реализации подхода суперхеджирования, основанный на построении хеджирующих множеств. По предложенному в работе определению хеджирующее множество составляется из всех таких портфелей, для которых существует самофинансируемая стратегия их пересмотра, позволяющая покрыть рассматриваемые обязательства при любом развитии событий. Такой подход позволяет эффективно решать задачу суперхеджирования и имеет наглядную геометрическую интерпретацию.

Было показано, что предложенный алгоритм практически без изменений обобщается на случай несимметричных издержек, и было представлено обобщение алгоритма для случая американских опционов, то есть для опционов с возможностью раннего исполнения.

Для всех рассмотренных применений алгоритма (для европейских и американских опционов и для случая несимметричных издержек) в работе были приведены соответствующие примеры расчетов. Там, где это было возможно, расчеты были приведены в сравнении с результатами других алгоритмов. Кроме того, были приведены расчеты эффективности хеджирования при использовании различных подходов.

На взгляд автора, использование хеджирующих множеств для реализации подхода суперхеджирования является перспективным, поскольку при этом можно использовать деревья практически любого вида в качестве моделей для цены основного актива. Кроме

того, использование многомерных хеджирующих множеств может позволить оценку и хеджирование производных финансовых инструментов, цены которых зависят от нескольких случайных факторов.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1. Доказательство некоторых утверждений

Обозначим хеджирующие множества из задачи (21)-(23), то есть из задачи для нахождения верхней границы интервала безарбитражных цен европейского опциона, через  $\widehat{X}(t, i)$ , а хеджирующие множества из задачи (24)-(26), то есть из задачи для нахождения нижней границы, через  $\check{X}(t, i)$ .

Положим

$$(52) \quad \widehat{C}(t, i) = \min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \widehat{X}(t, i)\},$$

$$(53) \quad \check{C}(t, i) = -\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{X}(t, i)\}.$$

Также напомним, что

$$(54) \quad \alpha(t, i) = \frac{(1+r)P(t, i) - P(t+1, i)}{P(t+1, i+1) - P(t+1, i)}.$$

**Лемма 1.** Пусть  $0 \leq \alpha(t, i) \leq 1$  для некоторых  $t$  и  $i$ . Тогда для этих  $t$  и  $i$  верно, что

$$\widehat{C}(t, i) \geq \frac{1}{1+r} (\alpha(t, i) \cdot \widehat{C}(t+1, i+1) + (1 - \alpha(t, i)) \cdot \widehat{C}(t+1, i)),$$

$$\check{C}(t, i) \leq \frac{1}{1+r} (\alpha(t, i) \cdot \check{C}(t+1, i+1) + (1 - \alpha(t, i)) \cdot \check{C}(t+1, i)).$$

*Доказательство.* Первое утверждение леммы следует из:

$$(55) \quad \begin{aligned} \widehat{C}(t, i) &= \min\{P(t, i) \cdot u + v \mid (u, v) \in \widehat{X}(t, i)\} = \\ &= \min\{P(t, i) \cdot u + v \mid P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) \mid u - a \mid, \\ &\quad (a, (1+r)b) \in \widehat{X}(t+1, i+1) \cap \widehat{X}(t+1, i)\} \geq \\ &\geq \min\{P(t, i) \cdot u + v \mid P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b, \\ &\quad (a, (1+r)b) \in \widehat{X}(t+1, i+1) \cap \widehat{X}(t+1, i)\} = \\ &= \min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, (1+r)b) \in \widehat{X}(t+1, i+1) \cap \widehat{X}(t+1, i)\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+r} \min\{(1+r)P(t,i) \cdot a + \tilde{b} \mid (a, \tilde{b}) \in \widehat{X}(t+1, i+1) \cap \widehat{X}(t+1, i)\} = \\
&= \frac{1}{1+r} \min\{\alpha(t,i)(P(t+1, i+1) \cdot a + \tilde{b}) + (1-\alpha(t,i))(P(t+1, i) \cdot a + \tilde{b}) \mid \\
&\quad (a, \tilde{b}) \in \widehat{X}(t+1, i+1) \cap \widehat{X}(t+1, i)\} \geq \\
&\geq \frac{1}{1+r} \left( \min\{\alpha(t,i)(P(t+1, i+1) \cdot a + \tilde{b}) \mid (a, \tilde{b}) \in \widehat{X}(t+1, i+1) \cap \widehat{X}(t+1, i)\} + \right. \\
&\quad \left. + \min\{(1-\alpha(t,i))(P(t+1, i) \cdot a + \tilde{b}) \mid (a, \tilde{b}) \in \widehat{X}(t+1, i+1) \cap \widehat{X}(t+1, i)\} \right) \geq \\
&\geq \frac{1}{1+r} \left( \min\{\alpha(t,i)(P(t+1, i+1) \cdot a + \tilde{b}) \mid (a, \tilde{b}) \in \widehat{X}(t+1, i+1)\} + \right. \\
&\quad \left. + \min\{(1-\alpha(t,i))(P(t+1, i) \cdot a + \tilde{b}) \mid (a, \tilde{b}) \in \widehat{X}(t+1, i)\} \right) = \\
&= \frac{1}{1+r} \left( \alpha(t,i) \min\{P(t+1, i+1) \cdot a + \tilde{b} \mid (a, \tilde{b}) \in \widehat{X}(t+1, i+1)\} + \right. \\
&\quad \left. + (1-\alpha(t,i)) \min\{P(t+1, i) \cdot a + \tilde{b} \mid (a, \tilde{b}) \in \widehat{X}(t+1, i)\} \right) = \\
&= \frac{1}{1+r} \left( \alpha(t,i) \cdot \widehat{C}(t+1, i+1) + (1-\alpha(t,i)) \cdot \widehat{C}(t+1, i) \right).
\end{aligned}$$

Второе утверждение леммы доказывается аналогично первому. □

**Лемма 2.** Пусть  $0 \leq \alpha(t, i) \leq 1$  для всех  $t = \overline{1, T-1}$  и для всех  $i = \overline{1, t}$ . Тогда  $\widehat{C}(1, 1) \geq \check{C}(1, 1)$ .

*Доказательство.* В силу определения хеджирующих множеств  $\widehat{X}(T, i)$  и  $\check{X}(t, i)$  (формулы (21) и (24) соответственно) верно, что  $\widehat{C}(T, i) \geq \check{C}(T, i)$  при всех  $i = \overline{1, T}$ . Предположим, что  $\widehat{C}(t+1, i) \geq \check{C}(t+1, i)$  при всех  $i = \overline{1, t+1}$ . Тогда, используя лемму 1, имеем:

$$\begin{aligned}
(56) \quad \widehat{C}(t, i) &\geq \frac{1}{1+r} \left( \alpha(t, i) \cdot \widehat{C}(t+1, i+1) + (1-\alpha(t, i)) \cdot \widehat{C}(t+1, i) \right) \geq \\
&\geq \frac{1}{1+r} \left( \alpha(t, i) \cdot \check{C}(t+1, i+1) + (1-\alpha(t, i)) \cdot \check{C}(t+1, i) \right) \geq \check{C}(t, i).
\end{aligned}$$

Отсюда, по индукции,  $\widehat{C}(1, 1) \geq \check{C}(1, 1)$ . □

Обозначим через  $\widehat{X}_a$  и  $\check{X}_a$  хеджирующие множества из задач для нахождения соответственно верхней и нижней границ интервала безарбитражных цен американского опциона, то есть из задач (39)-(41) и (42)-(44).

Положим

$$(57) \quad \widehat{C}_a(t, i) = \min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \widehat{X}_a(t, i)\},$$

$$(58) \quad \check{C}_a(t, i) = -\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{X}_a(t, i)\}.$$

**Лемма 3.** Пусть  $0 \leq \alpha(t, i) \leq 1$  для всех  $t = \overline{1, T-1}$  и для всех  $i = \overline{1, t}$ . Тогда  $\widehat{C}_a(1, 1) \geq \check{C}_a(1, 1)$ .

*Доказательство.* Положим

$$(59) \quad \widehat{E}(t, i) = \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) | u - a |, \\ (a, (1+r)b) \in \widehat{X}_a(t+1, i) \cap \widehat{X}_a(t+1, i+1)\},$$

$$(60) \quad \check{E}(t, i) = \{(u, v) : P(t, i) \cdot u + v \geq P(t, i) \cdot a + b + k \cdot P(t, i) | u - a |, \\ (a, (1+r)b) \in \check{X}_a(t+1, i) \cap \check{X}_a(t+1, i+1)\}.$$

Также положим

$$(61) \quad \widehat{G}(t, i) = \{(a, b) : P(t, i) \cdot a + b \geq C(t, i)\},$$

$$(62) \quad \check{G}(t, i) = \{(a, b) : P(t, i) \cdot a + b \geq -C(t, i)\},$$

где  $C(t, i)$  – доход, получаемый при исполнении американского опциона в момент времени  $t$  в состоянии  $i$ . Тогда формулы (40), (43) примут вид:

$$(63) \quad \widehat{X}_a(t, i) = \widehat{E}(t, i) \cap \widehat{G}(t, i),$$

$$(64) \quad \check{X}_a(t, i) = \check{E}(t, i) \cup \check{G}(t, i).$$

Положим

$$(65) \quad \widehat{Z}(t, i) = \min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \widehat{E}(t, i)\},$$

$$(66) \quad \check{Z}(t, i) = -\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{E}(t, i)\}.$$

Очевидно, что  $\widehat{C}_a(T, i) \geq \check{C}_a(T, i)$  при всех  $i = \overline{1, T}$ . Предположим, что  $\widehat{C}_a(t+1, i) \geq \check{C}_a(t+1, i)$  при всех  $i = \overline{1, t+1}$ . Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из лемм 1 и 2, получим, что

$$(67) \quad \widehat{Z}(t, i) \geq \check{Z}(t, i) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, t}.$$

Далее:

$$\begin{aligned}
 (68) \quad \widehat{C}_a(t, i) &= \min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \widehat{X}_a(t, i)\} = \\
 &= \min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \widehat{E}(t, i) \cap \widehat{G}(t, i)\} \geq \\
 &\geq \max(\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \widehat{E}(t, i)\}, \min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \widehat{G}(t, i)\}) = \\
 &= \max(\widehat{Z}(t, i), C(t, i)).
 \end{aligned}$$

Также

$$\begin{aligned}
 (69) \quad \check{C}_a(t, i) &= -\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{X}_a(t, i)\} = \\
 &= -\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{E}(t, i) \cup \check{G}(t, i)\} = \\
 &= -\min(\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{E}(t, i)\}, \min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{G}(t, i)\}) = \\
 &= \max(-\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{E}(t, i)\}, -\min\{P(t, i) \cdot a + b \mid (a, b) \in \check{G}(t, i)\}) = \\
 &= \max(\check{Z}(t, i), C(t, i)).
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$(70) \quad \widehat{C}_a(t, i) \geq \max(\widehat{Z}(t, i), C(t, i)) \geq \max(\check{Z}(t, i), C(t, i)) = \check{C}_a(t, i).$$

По индукции приходим к утверждению леммы.

□

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шведов, А.С. О математических методах, используемых при работе с опционами // Экономический журнал Высшей школы экономики. 1998. Т. 2. № 3. С. 385-409.
2. Bensaid, B., Lesne J., Pages H., Scheinkman J. Derivative Asset Pricing with Transaction Costs // Mathematical Finance. 1992. Vol. 2. No. 2. P. 63-86.
3. Black, F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. Issue 3. P. 637-654.
4. Boyle, P.P., Vorst T.C.F. Option Replication in Discrete Time with Transaction Costs // Journal of Finance. 1992. Vol. XLVII. No. 1. P. 271-293.
5. Cox, J.C., Ross S.A., Rubinstein M. Option Pricing: A Simplified Approach // Journal of Financial Economics. 1979. Vol. 7. P. 229-263.
6. Edirisinghe, C., Naik V., Uppal R. Optimal Replication of Options with Transactions Costs and Trading Restrictions // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1993. Vol. 28. No. 1. P. 117-138.
7. Hull, J.C. Options, Futures and Other Derivatives, 5th edition. Prentice Hall, 2002.
8. Merton, R.C. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. Vol. 4. P. 141-183.
9. Merton, R.C. Continuous Time Finance. Oxford: Basil Blackwell Ltd., 1990.
10. Palmer, K. A Note on the Boyle-Vorst Discrete-Time Option Pricing Model with Transactions Costs // Mathematical Finance. 2001. Vol. 11. Issue 3. P. 357-363.